2. 不安定系のソリトン(II. 古典ソリトン,特に高次元ソリトン,ソリトン系のダイナミックスとそれに関するカオスの問題,基研長期研究会報告)

参考文献

1) For example: *Solitons in Action,* edited by K. E. Lonngren and A. C. Scott (Academic, New York, 1978).
2) 西田　靖，日本物理学会誌 37，396(1982).
3) Y. Nakamura, IEEE Trans. on Plasma Sci., PS-1, 180 (1982).
4) A. C. Newell and L. G. Redekopp, Phys. Rev. Lett. **38**, 377 (1977).
5) N. Yajima, M. Oikawa, and J. Satsuma, J. Phys. Soc. Japan **44**, 1711 (1978).
6) Y. Nishida, T. Nagasawa, and S. Kawamata, Phys. Rev. Lett. **42**, 379 (1979).
7) F. Ze, N. Hershkowitz, and C. Chan, and K. E. Lonngren, Phys. Rev. Lett. **42**, 1747 (1979); F. Ze, N. Hershkowitz, and K. E. Lonngren, Phys. Fluids **23**, 1155 (1980). J. W. Miles, J. Fluids Mech. **79**, 157 (1977); **79**, 171 (1977).
8) P. A. Folkes, H. Ikezi, and R. Davis, Phys. Rev. Lett. **45**, 902 (1980).
9) Y. Nishida and T. Nagasawa, Phys. Rev. Lett. **45**, 1626 (1980).
10) T. Nagasawa, M. Shimizu and Y. Nishida, Phys. Lett. **87A**, 37 (1981).
11) F. Kako and N. Yajima, J. Phys. Soc. Japan **49**, 2063 (1980).
12) T. Nagasawa and Y. Nishida, (submitted to Phys. Rev. A).
13) I. Tsukabayashi, Y. Nakamura, F. Kako and K. E. Lonngren, (preprint).
14) B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **192**, 753 (1970) [Sov. Phys. Dokl. **15**, 539 (1970)].

不安定系のソリトン

九大応力研　矢嶋信男，河野光雄，上田正二

分散媒質内を伝播する非線形波動現象でソリトンが重要な役割を果すことはよく知られている。この場合，ソリトンモードは分散と非線形性のバランスによって安定に保たれるのである。一次元のときには，現象の本質的な部分はいわゆるKdV方程式で記述されることが判っていて，ソリトンの安定性や衝突における個性保存など興味ある事柄が発見されている。その結果，ソリトン非線形ノーマルモードとして解釈する立場も生まれている。二次元系でもソリトンは重要である。波面に平行な方向の変動がゆるやかであって，弱二次元近似が許されるときには，現象はKadomtsev-Petviashvilli方程式で表される。この方程式についても，いろいろの議論が行われているが，中でも興味深いのはソリトンレゾナンスである。一

次元KdV系では，ソリトン間の衝突でその個性は保存され，ソリトンはその位相を変えるにすぎない。しかし，二次元KP系ではレゾナンスが起るので，それにより新たに共鳴ソリトンが発生する。実際に，浅水波やプラズマ中のイオン音波では，ソリトンレゾナンスの例が観測されている。このように，，二次元系でも，ソリトンは非線形ノーマルモードとしての役割を担っているが，その相互作用は一次元のときほど単純ではない。

以上のように，ソリトンについて多くのことが判ってきたが，これまでのソリトン研究の大部分は，単一モード系に関するものであって，多モード系についての考察は少い。多モード系では，モード間結合に相当して，ソリトン間の相互作用も多様になると予想される。もっとも簡単な例として，プラズマにおけるラングミュアソリトンがある。これはプラズマ振動（ラングミュア波）とイオン音波が結合した例で，プラズマ振動の変調によってイオン音波が生成され，このイオン音波にともなう密度の谷間にプラズマ振動を捕捉することによって，ソリトンを保持している。この例は，Zakharovによって考察されたが，ソリトンは必ずしも安定でなく，条件によっては，分裂や融合が生じることが知られている。こゝでは，多モード系の別の例として，イオンビームが存在するプラズマ内での低周波波動の非線形過程を考える。この例では，プラズマ内には，ビームに固有の振動モードと通常のイオン音波のモードとが共存している。いわゆる，Fast mode（以下ではF-modeと略記），Slow mode（S-mode），Acoustic mode（A-mode）である。A-modeは左右に伝播できるので，全部でモードは4種類ある。このうち，ビームと反対方向に伝播するA-modeはビームモードとの結合が弱いので独立なモードとして考えてよい。この部分を分離すれば，系はF.S.およびビーム方向に走るA-modeの3個のモードの結合系と考えられる。また，この系は，ビーム速度を適当にえらべば，S-modeとA-modeは不安定モードになり得るので，その意味でも，此の系のソリトンの挙動を調べることは興味深い。

われわれの考えている問題は，適当に規格化された量を用いれば，

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{a^3}{2}\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

で記述される。こゝで，u，vはそれぞれ静電ポテンシアル，ビーム密度の変動成分に比例した量で，(x,t)はビームとともに走る系で見た空間座標と時間である。パラメータaが0であれば，(1)はKdV系を与える。aが0でなければ，一般にモードが3個存在して，それぞれに対応してソリトンモードが可能である。

線形近似をすれば，(1) は分散式

$$\omega - \frac{a^3}{2}\frac{k^3}{\omega^2} = -k(1+k^2) \tag{2}$$

を与える。これは $a<2/3$ で3個の実根を与え，ω の大きさの順に F.S.A の各モードに相当する。$a>2/3$ では $k<k_c$,

$$k_c = \sqrt{3a/2-1} \tag{3}$$

の波に対して，1個の実根と2個の共役複素根を与え，系は不安定になる。この系の安定条件 $a<2/3$ は，ソリトンモードの存在と関係している。

(1) の定常解としてのソリトン解は

$$\left.\begin{aligned} u &= 12K^2\,\mathrm{sech}^2[Kx-\Omega t] \\ v &= (K/\Omega)^2 u \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

となる。但，Ω は K に依存して

$$\Omega - \frac{a^3}{2}\frac{K^3}{\Omega^2} = -K(1-4K^2) \tag{6}$$

で与えられる。このソリトン分散式は，$a<2/3$ のときには3個のソリトンモードを与え，$a>2/3$ では F-mode に対応したソリトンしか与えない。また，たとえ $a<2/3$ であっても，A-, S-ソリトンモードは $K<K_c$,

$$K_c = (1-3a/2)^{1/2}/2, \tag{9}$$

に限られていて，$12K_c^2$ より大きな振幅をもった A, S ソリトン解は不可能である。

(1) の系でソリトンがやはり安定な非線形ノーマルモードとしての役割を持つのであろうか。これを数値的に調べた結果をまとめると以下のようになる。

(a)　振幅が小さいときには，非線形波動の発展過程は互いに独立な三つの KdV モードの重ね合せで記述できる。

(b)　$K\sim K_c$ のソリトンが関与する場合には，A,S-mode の結合した explosive mode があらわれる。

(c)　$a<2/3$ で線形安定な場合でも，非線形段階でその振幅が発散する現象が見られるが，その最終過程はすべて (b) の explosive mode による。

(d)　F.S.A の3モードの位相速度が有理比をなすときには，パラメトリック効果により，各モードにエネルギーが配分され，explosive mode による不安定を生じやすい。この現象は

F-modeについて顕著に見られる。

上の数値計算の結果のうち(a)は逓減摂動法を用いて説明することが可能である。(1)をベクトル形式であらわすと,

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}+\left(u+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)D\frac{\partial}{\partial x}U=0 \tag{8}$$

たゞし，${}^tU=(u,v,w)$であり，wは$\partial w/\partial t=\partial u/\partial x$で定義する。したがって(1)から，$\partial v/\partial t=\partial w/\partial x$である。$A$, Dは3×3行列で

$$A=\begin{pmatrix}-1 & a^3/2 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

となる。Aの固有ベクトルを$\boldsymbol{R}_i$，固有値をμ_iとして

$$A\boldsymbol{R}_i=\mu_i\boldsymbol{R}_i \tag{9}$$

とする。固有値μ_iは分散を無視したときの各モードの位相速度である。μ_iを用いて，各モードの座標変数を導入しておく：

$$\xi_i=(x-\mu_i t+\psi_i)。 \tag{10}$$

ψ_iは，モード間の相互作用によるモード座標の曲がりを与えている。逓減摂動法によれば，最低次ではUは各固有モードの重ね合せで記述されることが示される：

$$U=\sum_{i=1}^{3}f_i(\xi_i,t)\boldsymbol{R}_i \tag{11}$$

f_iとψ_iは次のオーダーで永年項を消去することによって得られる：

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}+\frac{\mu_i^2}{3\mu_i+2}f_i\frac{\partial f_i}{\partial \xi_i}+\frac{\mu_i}{3\mu_i+2}\frac{\partial^3 f_i}{\partial \xi_i^3}=0, \tag{12}$$

$$\psi_i=-\sum_{j\neq i}\frac{\mu_i\mu_j}{3\mu_i+2}\frac{1}{\mu_i-\mu_j}\int^{\xi_j}f_j(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{13}$$

(12)はKdV方程式そのものであるので，振幅が小さい限り，KdV近似は良好であることが判る。

数値計算の結果(b),(c)で述べたEXPLOSIONの現象は$K\sim K_c$のところでおこる。そこでは，A-modeとS-modeの分離は良くない。この領域の考察は一般にはむづかしいので，

こゝではaが2/3に近い場合に話を限っておく。このときにはSとAの分散曲線の間隔は小さく，$K \sim K_c$近傍の議論を行うのに便利である。$a = 2/3$では，(9)の固有値は，$\mu_1 = 1/3$，$\mu_2 = \mu_3 = -2/3$となる。$\mu = -2/3$にはSとAのモードに相当する固有値が縮退している。$a \simeq 2/3$であれば，μ_Sとμ_Aの$-2/3$からのずれは小さいので，$-2/3 = -a$で走る座標系にのったとき系の時間変化は小さくなる筈である。そこでSとAの結合系を扱うため，(x, t)の代りに(η, τ)を導入して

$$\eta = x + at, \quad \tau = at \tag{14}$$

とする。(1)に(14)の変換を用い，τ-依存性を小さいとして，$\partial/\partial\tau$の最低次を残す。さらに，

$$a = \frac{2}{3}(1+\varepsilon), \quad |\varepsilon| \ll 1$$

として，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right] = 0 \tag{15}$$

が得られる。これは臨界点近傍（$a \cong 2/3$）における系の非線形発展を記述している。$\varepsilon < 0$は線形安定系を$\varepsilon > 0$は線形不安定系を与える。(15)の正確解は，いくつかの特別な場合について求めることが可能である。$\varepsilon < 0$では，(15)のソリトン解は(4)で与えられるが，Ωは(5)の代りに，

$$\Omega = \pm K(|\varepsilon| - 4K^2)^{1/2} \tag{16}$$

となる。複号±はそれぞれ，S,A-modeのソリトンに対応する。広田法を用いれば，(15)のNソリトン解を求めることは容易である。とくに$N = 2$のときの解は，ソリトンの2体衝突をあらわすが，それは必ずしもKdV的ではなく，2つのソリトンの振幅がある程度大きいと衝突の後で解は発散してしまう。これは(c)でのべた現象に関連している。ソリトン解は，(16)から判るように，$K^2 < |\varepsilon|/4$でのみ意味をもつが，$K^2 > |\varepsilon|/4$では広田解はexplosive modeの解：

$$u = 12K^2 \frac{1 - A\,\mathrm{ch}(K\eta)\sin\omega\tau}{[\mathrm{ch}(K\eta) - A\sin\omega\tau]^2} \tag{17}$$

を与える。ただし

$$\left.\begin{aligned} \omega &= K\,(K^2-|\varepsilon|)^{1/2}, \\ A &= [\,(4K^2-|\varepsilon|)/(K^2-|\varepsilon|)\,]^{1/2}\,。\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

である。上の解は$K^2-|\varepsilon|$が正負にかゝわらず成立する。(17)は$\tau=0$で$u=12K^2\,\mathrm{sech}^2(K\eta)$というソリトン型のパルスとなるが，有限の$\tau$で分母が0となるので爆発現象をひきおこす。そのときの波形は，数値計算で求められたexplosive modeの波形と良く一致している。(17)のexplosive modeは$\varepsilon>0$でも可能である。その場合，ωとAは(18)で$|\varepsilon|\to-\varepsilon$とおいたものになっている。また，$\varepsilon>0$での線形不安定モードの非線形発展を記述する正確解も求めることができる。この解は，ごく初期には線形不安定性によって増幅する正弦波に一致し，時間とともに波の山のところでピークは鋭く立ち上り，腹の部分は平担化して，パルス的な波形が形成され，最終的にEXPLOSIVE MODEにつながる。

こゝで考えた不安定系では，ソリトンは振幅が小さいところでのみ意味をもつ。そこでは系の非線形発展は独立な3個のKdVモードの重ね合せで記述される。振幅が大きくなると，ソリトンは安定に存在できず，EXPLOSIONの現象をひきおこす。このexplosive modeは不安定性の非線形過程と考えられ，(1)の系では非線形項は全く安定化作用を持たないことを示している。現実のビームプラズマ系では，ポテンシアルピークのところでのビームイオンの反射によってexplosive modeは安定化されると考えられるが，これは今後の問題である。

高次元空間における非線型モード

京工繊大・工芸　武　野　正　三

§1. Introduction

ソリトン理論のessenceの一つは非線型微(差)分方程式に対する広田の双一次形式[1)]の存在である。最も簡単且つ一般的なものは次の双一次方程式

$$F(D_x, D_y, D_z, D_t)\,f\cdot f=0 \quad \text{with} \quad F(0,0,0,0)=0 \tag{1}$$

である。ここにFはD_x等の偶関数である。ソリトンは，fを$\exp(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\,(\vec{k}=(k_x,$